Dévellopement asymptotique

1. Résoudre

   (a) $t^2y'' + (t^2 + \frac{t}{2})y' + ty = 0$

   (b) $t^2y'' - ty' - (\frac{5}{4} + 8t + 4t^2)y = 0$

2. Montrer que les solutions de $t^2y'' + (1+t)y' + y = 0$ sont de la forme $a(t)t^2e^{-1/t} + b(t)$ avec a et b deux fonctions lisse non dégénérés en 0.

Méthode des caractéristiques

3. Donner la forme explicite de la solution de l'équation de transport suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + (t-x)\partial_x u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   avec donnée initiale $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$.

4. *Système hyperbolique.* Etant donnés deux réels a, b, on considère l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$\begin{cases} \partial_t^2 u(t,x) + 2a\partial_{t,x}^2 u(t,x) + b\partial_x^2 u(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ u(0,x) = f(x), & x \in \mathbb{R}, \\ \partial_t u(0,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

   où $f \in C^2(\mathbb{R})$ et $g \in C^1(\mathbb{R})$ sont deux fonctions données.

   (a) En posant $U_1 = \partial_t u$ et $U_2 = \partial_x u$, réécrire cette équation d'ordre 2 sous la forme d'un système aux dérivées partielles d'ordre 1, d'inconnue $U = (U_1, U_2)^T$:

$$\begin{cases} \partial_t U(t,x) + A\partial_x U(t,x) = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ U(0,x) = U_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

   On exprimera la matrice A ainsi que U_0 en fonction des données du problème.

   (b) Montrer que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ sous une condition sur les constantes a et b. Dans ce cas, on note (λ_1, λ_2) les valeurs propres de A et P la matrice de passage associée, puis on pose $V = P^{-1}U$. Ecrire le système vérifié par la nouvelle inconnue V (ne pas calculer explicitement λ_1, λ_2 et P).

   (c) En déduire que le système (1) admet une unique solution, sous la condition précédente sur a et b.

   (d) Lorsque $a^2 < b$, on effectue le changement de variables $y = x$ et $z = t - \lambda x$, avec λ à choisir, et le changement d'inconnue $w(y,z) = u(x,t)$. Ecrire l'équation satisfaite par la fonction w. Quelle est la nature de ce système ?